Compléments de calcul intégral

Intégrale double sur un compact

Exercice 1 [00085] [correction]
Calculer
$$I = \iint_{\mathcal{D}} \sin(x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
où $\mathcal{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \geqslant 0 \text{ et } x+y \leqslant \pi\right\}$.

Exercice 2 [00089] [correction]
Calculer
$$I = \iint_{\mathcal{D}} x^2y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
où $\mathcal{D}$ est l'intérieur de la boucle de la lemniscate d'équation polaire $r = \sqrt{\cos 2\theta}$ obtenue pour $\theta \in [-\pi/4, \pi/4]$.

Exercice 3 [00086] [correction]
Calculer
$$I = \iint_{\mathcal{D}} yx^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
où $\mathcal{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leqslant 1, y \geqslant 0 \text{ et } y^2 \leqslant x\right\}$.

Exercice 4 [00090] [correction]
Calculer
$$\iint_{\mathcal{D}} (x+y)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
où $\mathcal{D} = \left\{(x,y)/x^2+y^2-x \leqslant 0, x^2+y^2-y \geqslant 0, y \geqslant 0\right\}$.

Exercice 5 [00091] [correction]
Soient $1 < a < b$. En calculant de deux manières
$$\int_0^{\pi}\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x-\cos t}\,\mathrm{d}t$$
déterminer
$$\int_0^{\pi} \ln\frac{b-\cos t}{a-\cos t}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 6 [00092] [correction]
Observer que pour tout $x \in [0,1]$,
$$\ln(1+x) = \int_0^1 \frac{x\,\mathrm{d}y}{1+xy}$$
En déduire la valeur de
$$I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)\,\mathrm{d}x}{1+x^2}$$

Exercice 7 [00093] [correction]
Soit $r > 0$. On note $A_r = [0,r]\times[0,r]$ et $B_r = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^{+2}/0 \leqslant x^2+y^2 \leqslant r^2\right\}$.
On pose
$$f(r) = \iint_{A_r} \exp(-(x^2+y^2))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \text{ et } g(r) = \iint_{B_r} \exp(-(x^2+y^2))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
a) Montrer que $g(r) \leqslant f(r) \leqslant g(r\sqrt{2})$.
b) En déduire la valeur de
$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 8 Centrale MP [00095] [correction]
Calculer
$$\iint_{\mathcal{D}} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(1+x^2+y^2)^2}$$
où $\mathcal{D}$ est donné par $|x| \leqslant x^2+y^2 \leqslant 1$.

Exercice 9 [00096] [correction]
Calculer
$$\iint_{\Delta} (x^3-2y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
avec
$$\Delta = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2/x \geqslant 0, y \geqslant 0, \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \leqslant 1\right\}$$
On pourra utiliser le changement de variable $x = au\cos\theta$ et $y = bu\sin\theta$.

Exercice 10 [00097] [correction]
a) Justifier la convergence de

$$\int_0^{+\infty} \cos(u^2)\,\mathrm{d}u \text{ et } \int_0^{+\infty} \sin(u^2)\,\mathrm{d}u$$

b) Soit $f : [0, \pi/2[\to \mathbb{R}^{+\star}$ une application continue. Pour $t > 0$ on note $D_t = \{(r\cos\theta, r\sin\theta)/\theta \in [0, \pi/2], r \in [0, tf(\theta)]\}$,

$$\varphi(t) = \iint_{D_t} \sin(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \text{ et } \psi(t) = \iint_{D_t} \cos(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Déterminer les limites, quand T tend vers $+\infty$ de

$$\frac{1}{T}\int_0^T \varphi \text{ et } \frac{1}{T}\int_0^T \psi$$

c) On choisit f pour que $D_1 = [0,1]^2$. On pose

$$C(t) = \int_0^t \cos(u^2)\,\mathrm{d}u \text{ et } S(t) = \int_0^t \sin(u^2)\,\mathrm{d}u$$

Montrer que $\varphi(t) = 2C(t)S(t)$ et $\psi(t) = C(t)^2 - S(t)^2$.
d) En déduire les valeurs des intégrales de Fresnel

$$\int_0^{+\infty} \cos(u^2)\,\mathrm{d}u \text{ et } \int_0^{+\infty} \sin(u^2)\,\mathrm{d}u$$

Exercice 11 Mines-Ponts MP [02914] [correction]
Soit

$$I_n = \iint_{[0,1]^2} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{1+x^n+y^n}$$

Déterminer la limite de I_n quand $n \to +\infty$.

Exercice 12 [03200] [correction]
D désigne le demi-disque supérieur de centre $(1,0)$ et de rayon 1. Calculer

$$I = \iint_D \frac{y}{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Intégrale double sur un produit d'intervalles

Exercice 13 [02919] [correction]
Calculer

$$\iint_{[0,+\infty[^2} \frac{y}{(1+x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Exercice 14 [00098] [correction]
En calculant de deux façons

$$\iint_{]0,1]^2} x^y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

déterminer la valeur de

$$\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 15 [00099] [correction]
En calculant de deux façons

$$\iint_{[0,\pi]\times[0,1[} \frac{1}{1+y\cos x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

déterminer la valeur de

$$\int_0^\pi \frac{\ln(1+\cos t)}{\cos t}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 16 [00100] [correction]
En calculant de deux façons

$$\iint_{[0,+\infty[^2} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

déterminer la valeur de

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 17 [00101] [correction]
On pose

$$I = \iint_{]0,+\infty[^2} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

a) Justifier l'existence de I et établir

$$I = \int_{x=0}^{+\infty} \left(\int_{u=0}^{+\infty} x\mathrm{e}^{-(1+u^2)x^2}\,\mathrm{d}u \right) \mathrm{d}x$$

b) En déduire la valeur de

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 18 Centrale MP [00102] [correction]
Que dire de

$$\iint_D \frac{x-y}{(x+y)^3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

où $D =]0,1] \times [0,1]$?

Exercice 19 [00250] [correction]
Calculer

$$\iint_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(1+x^2)(1+y^2)}$$

En déduire

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\ln(\tan\theta)}{\cos 2\theta}\,\mathrm{d}\theta \text{ et } \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2-1}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 20 [00270] [correction]
Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive. Calculer

$$I = \iint_{\mathbb{R}^2} \exp(-{}^tXAX)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

ou X désigne le vecteur de coordonnées (x,y).

Formes différentielles

Exercice 21 [00258] [correction]
a) Montrer que la forme différentielle $\omega = (x+y)\,\mathrm{d}x + (x-y)\,\mathrm{d}y$ est exacte et déterminer une primitive de ω.
b) Résoudre alors l'équation différentielle

$$x + y + (x-y)y' = 0$$

dont l'inconnue est la fonction y de la variable réelle x.

Intégrales curvilignes

Exercice 22 [00106] [correction]
On considère la forme différentielle

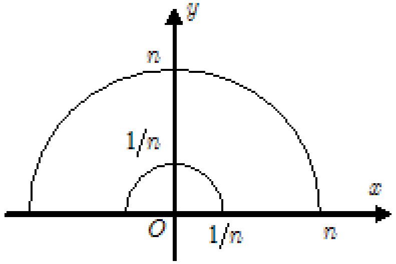
$$\omega(x,y) = \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$$

définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
a) La forme différentielle ω est-elle fermée ?
b) Calculer l'intégrale de ω le long du cercle de centre O, de rayon 1 parcouru dans le sens direct.
c) La forme différentielle ω est-elle exacte ?

Exercice 23 [00107] [correction]
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.
a) Montrer que la forme différentielle suivante est fermée :

$$\omega(x,y) = \frac{\mathrm{e}^{-y}}{x^2+y^2}\left((x\sin x - y\cos x)\,\mathrm{d}x + (x\cos x + y\sin x)\,\mathrm{d}y\right)$$

b) Calculer la circulation de ω le long de l'arc direct ci-dessous



c) En passant à la limite quand $n \to +\infty$ déterminer la valeur de

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x$$

Exercice 24 Mines-Ponts MP [00109] [correction]
Soient O, A, B les points d'affixes respectives $0, r, r\exp(i\pi/4)$ avec $r > 0$. Soit Γ_r l'arc paramétré de $\mathbb{C}$ constitué du segment $[O, A]$, orienté de O vers A, de l'arc $\mathcal{C}_r$ du cercle de centre O et de rayon r d'origine A et d'extrémité B et du segment $[B, O]$ orienté de B vers O.
a) Calculer

$$I_r = \oint_{\Gamma_r} \mathrm{e}^{-(x+iy)^2} (\,\mathrm{d}x + i\,\mathrm{d}y)$$

b) Que dire de la limite, quand $r \to +\infty$, de

$$J_r = \int_{\mathcal{C}_r} \mathrm{e}^{-(x+iy)^2} (\,\mathrm{d}x + i\,\mathrm{d}y)?$$

c) Qu'en déduire ?

Formule de Green Riemann

Exercice 25 [00269] [correction]
Soit Γ la courbe orientée dans le sens trigonométrique, constituée des deux portions de courbes, comprises entre les points d'intersection, de la droite d'équation $y = x$ et de la parabole d'équation $y = x^2$.
a) Calculer

$$I = \oint_\Gamma (y + xy)\,\mathrm{d}x$$

b) En utilisant la formule de Green-Riemann, retrouver la valeur de cette intégrale.

Exercice 26 [00111] [correction]
Calculer l'aire de la portion bornée du plan délimitée par l'ellipse donnée par

$$\begin{cases} x(t) = a\cos t \\ y(t) = b\sin t \end{cases} \text{(avec } a, b > 0)$$

Exercice 27 [00079] [correction]
Calculer l'aire de la portion bornée du plan délimitée par l'astroïde donnée par

$$\begin{cases} x(t) = a\cos^3 t \\ y(t) = a\sin^3 t \end{cases} \text{(avec } a > 0)$$

Exercice 28 [00606] [correction]
Calculer l'aire de la portion bornée du plan délimitée par l'arche de la cycloïde

$$\begin{cases} x(t) = t - \sin t \\ y(t) = 1 - \cos t \end{cases}$$

obtenue pour $t \in [0, 2\pi]$ et l'axe des abscisses.

Exercice 29 [02462] [correction]
Calculer l'aire de la portion bornée du plan délimitée par la courbe définie par

$$\begin{cases} x(t) = \cos^2 t \\ y(t) = (1 + \sin t)\cos t \end{cases}$$

Exercice 30 [00112] [correction]
Calculer l'aire de la portion bornée du plan délimitée par la cardioïde d'équation polaire

$$r = 1 + \cos\theta$$

Exercice 31 [00069] [correction]
Calculer l'aire de la portion bornée du plan délimitée par la lemniscate d'équation polaire

$$r = \sqrt{\cos 2\theta}$$

Exercice 32 [00062] [correction]
Calculer l'aire de la boucle de la strophoïde droite d'équation polaire

$$r = \frac{\cos 2\theta}{\cos\theta}$$

Exercice 33 [00108] [correction]
On considère $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

Soit $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par $\forall r \in \mathbb{R}^+$,

$$\varphi(r) = \int_0^{2\pi} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

a) Montrer que φ est dérivable.
b) Calculer φ' et en déduire φ. On pourra interpréter $r\varphi'(r)$ comme la circulation d'une forme différentielle sur un contour simple.
c) Soit $\mathcal{D}$ le disque de centre 0 et de rayon R. Quelle est la valeur de

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y?$$

Exercice 34 Centrale MP [00110] [correction]
[Inégalité isopérimétrique]
Soit γ une application de classe $\mathcal{C}^1$ et 2π-périodique de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}$ telle que

$$\forall s \in \mathbb{R}, |\gamma'(s)| = 1$$

On note S l'aire orientée délimitée par $\gamma_{\restriction[0,2\pi]}$.
a) Exprimer S à l'aide des coefficients de Fourier de γ.
b) Montrer $S \leqslant \pi$ et préciser le cas d'égalité.

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
On peut décrire $\mathcal{D}$ sous la forme

$$\mathcal{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leqslant x \leqslant \pi \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant \pi - x\right\}$$

et ainsi exprimer l'intégrale étudiée

$$I = \int_{x=0}^{\pi} \int_{y=0}^{\pi - x} \sin(x+y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{x=0}^{\pi} \cos(x) + 1\,\mathrm{d}x = \pi$$

Exercice 2 : [énoncé]
En passant en coordonnées polaires

$$I = \int_{\theta=-\pi/4}^{\pi/4} \int_{r=0}^{\sqrt{\cos 2\theta}} r^4 \cos^2\theta \sin^2\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{1}{24} \sin^2 2\theta \cos^3 2\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{180}$$

Exercice 3 : [énoncé]
On peut décrire $\mathcal{D}$ sous la forme

$$\mathcal{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leqslant x \leqslant 1 \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{x}\right\}$$

et ainsi exprimer l'intégrale étudiée

$$I = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{x}} yx^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{2} x^3\,\mathrm{d}x = \frac{1}{8}$$

Exercice 4 : [énoncé]
On peut décrire le domaine d'intégration en coordonnées polaires sous la forme

$$\mathcal{D} = \{M(r\cos\theta, r\sin\theta)/\theta \in [0,\pi/4]\,/\sin\theta \leqslant r \leqslant \cos\theta\}$$

En passant aux coordonnées polaires

$$\iint_{\mathcal{D}} (x+y)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{\pi/4} \left(\int_{\sin\theta}^{\cos\theta} r^3 (\cos\theta + \sin\theta)^2\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\theta$$

donc

$$\iint_{\mathcal{D}} (x+y)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/4} (\cos^4\theta - \sin^4\theta)(\cos\theta + \sin\theta)^2\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/4} \cos 2\theta(1 + \sin 2\theta)\,\mathrm{d}\theta = \frac{3}{16}$$

Exercice 5 : [énoncé]
D'une part

$$\int_0^{\pi} \int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x - \cos t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} \ln\frac{b - \cos t}{a - \cos t}\,\mathrm{d}t$$

D'autre part

$$\int_0^{\pi} \int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x - \cos t}\,\mathrm{d}t = \int_a^b \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}t}{x - \cos t}\,\mathrm{d}x$$

et

$$\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}t}{x - \cos t} \underset{u = \tan\frac{t}{2}}{=} \int_0^{+\infty} \frac{2\,\mathrm{d}u}{(1+x)u^2 + x - 1} = \frac{\pi}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

On en déduit

$$\int_0^{\pi} \ln\frac{b - \cos t}{a - \cos t}\,\mathrm{d}t = \int_a^b \frac{\pi}{\sqrt{x^2 - 1}}\,\mathrm{d}x = \pi\left[\operatorname{argch} x\right]_a^b = \pi \ln\frac{b + \sqrt{b^2 - 1}}{a + \sqrt{a^2 - 1}}$$

Exercice 6 : [énoncé]
Par simple détermination de primitive

$$\int_0^1 \frac{x\,\mathrm{d}y}{1 + xy} = \left[\ln(1 + xy)\right]_0^1 = \ln(1 + x)$$

On a

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)\,\mathrm{d}x}{1 + x^2} = \int_0^1 \int_0^1 \frac{x}{(1+xy)(1+x^2)}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

Or

$$\frac{x}{(1+xy)(1+x^2)} = \frac{a}{1+xy} + \frac{bx + c}{1 + x^2} \text{ avec } a = -\frac{y}{1+y^2}, b = \frac{1}{1+y^2}, c = \frac{y}{1+y^2}$$

donc

$$I = \int_0^1 \int_0^1 \frac{-y}{(1+xy)(1+y^2)} + \frac{x+y}{(1+x^2)(1+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -I + \int_0^1 \int_0^1 \frac{x+y}{(1+x^2)(1+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

puis

$$I = \int_0^1 \int_0^1 \frac{y}{(1+y^2)(1+x^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{y}{(1+y^2)}\,\mathrm{d}y \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi\ln 2}{8}$$

Exercice 7 : [énoncé]
a) $B_r \subset A_r \subset B_{r\sqrt{2}}$ et $\exp(-(x^2+y^2)\geqslant 0$ donc

$$g(r) \leqslant f(r) \leqslant g(r\sqrt{2})$$

b) En passant aux coordonnées polaires

$$g(r) = \int_0^{\pi/2}\int_0^r \rho\mathrm{e}^{-\rho^2}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{4}(1-\mathrm{e}^{-r^2}) \xrightarrow[r\to+\infty]{} \frac{\pi}{4}$$

Par encadrement, on obtient

$$f(r) \xrightarrow[r\to+\infty]{} \frac{\pi}{4}$$

Or

$$f(r) = \left(\int_0^r \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2 \xrightarrow[r\to+\infty]{} \left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2$$

et $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \geqslant 0$ donc

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Exercice 8 : [énoncé]
En visualisant le domaine comme le complémentaire de la réunion de deux cercles dans le cercle unité et par des considérations de symétrie, on obtient en passant aux coordonnées polaires

$$\iint_{\mathcal{D}} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(1+x^2+y^2)^2} = 4\int_0^{\pi/2}\left(\int_{\cos\theta}^1 \frac{r}{(1+r^2)^2}\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\theta = 2\int_0^{\pi/2}\frac{1}{1+\cos^2\theta} - \frac{1}{2}\,\mathrm{d}\theta$$

Or

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\theta}{1+\cos^2\theta} = \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2+2} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

donc

$$\iint_{\mathcal{D}} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(1+x^2+y^2)^2} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{2} = \frac{(\sqrt{2}-1)\pi}{2}$$

Exercice 9 : [énoncé]
$\Phi : (u,\theta) \mapsto (au\cos\theta, bu\sin\theta)$ réalise une bijection de $[0,1]\times[0,\pi/2]$ vers Δ de jacobien : abu.
Par changement de variable

$$\iint_\Delta (x^3-2y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{\pi/2}\left(\int_0^1 (a^3u^3\cos^3\theta - 2bu\sin\theta)abu\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}\theta = \frac{2}{15}ab\left(a^3-5b\right)$$

Exercice 10 : [énoncé]
a) Pour $A\in\mathbb{R}^+$

$$\int_0^A \cos(u^2)\,\mathrm{d}u = \int_0^1\cos(u^2)\,\mathrm{d}u + \int_1^A \cos(u^2)\,\mathrm{d}u$$

Par intégration par parties :

$$\int_1^A \frac{u}{u}\cos(u^2)\,\mathrm{d}u = \left[\frac{1}{2u}\sin(u^2)\right]_1^A + \frac{1}{2}\int_1^A \frac{\sin(u^2)}{u^2}\,\mathrm{d}u \xrightarrow[A\to+\infty]{} \ell\in\mathbb{R}$$

On procède de même pour $\int_0^{+\infty}\sin(u^2)\,\mathrm{d}u$.
b) En passant aux coordonnées polaires

$$\varphi(t) = \iint_{D_t}\sin(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\theta=0}^{\pi/2}\left(\int_{r=0}^{tf(\theta)} r\sin(r^2)\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\theta$$

donc

$$\varphi(t) = \int_{\theta=0}^{\pi/2}\frac{1}{2}\left(1-\cos(t^2f(\theta))\right)\mathrm{d}\theta$$

puis

$$\frac{1}{T}\int_0^T\varphi(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{T}\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^T\cos(t^2f(\theta))\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\theta$$

Par changement de variable affine, sachant $f(\theta)>0$, on a

$$\int_0^T\cos(f(\theta)t^2)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{f(\theta)}}\int_0^{\sqrt{f(\theta)}T}\cos(u^2)\,\mathrm{d}u$$

Or $A\mapsto\int_0^A\cos(u^2)\,\mathrm{d}u$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et admet une limite finie en $+\infty$ donc elle est bornée par un certain M. On a alors

$$\left|\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^T\cos(t^2f(\theta))\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\theta\right| \leqslant \int_0^{\pi/2}\left|\int_0^T\cos(t^2f(\theta))\,\mathrm{d}t\right|\mathrm{d}\theta \leqslant \int_0^{\pi/2}\frac{M}{\sqrt{f(\theta)}}\,\mathrm{d}\theta = C^{te}$$

puis

$$\frac{1}{T}\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^T\cos(t^2f(\theta))\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\theta \to 0$$

Finalement

$$\frac{1}{T}\int_0^T\varphi(t)\,\mathrm{d}t \to \frac{\pi}{4}$$

De manière semblable, on obtient

$$\frac{1}{T}\int_0^T \psi(t)\,\mathrm{d}t \to 0$$

c) On a

$$\varphi(t) = \int_{x=0}^t \left(\int_{y=0}^t \sin(x^2+y^2)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

or

$$\sin(x^2+y^2) = \sin(x^2)\cos(y^2) + \sin(y^2)\cos(x^2)$$

En séparant,

$$\varphi(t) = \int_0^t \sin(x^2)\,\mathrm{d}x \int_0^t \cos(y^2)\,\mathrm{d}y + \int_0^t \sin(y^2)\,\mathrm{d}y \int_0^t \cos(x^2)\,\mathrm{d}x$$

puis

$$\varphi(t) = 2S(t)C(t)$$

De même

$$\psi(t) = C(t)^2 - S(t)^2$$

d) Lorsqu'une fonction $g : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ continue tend vers ℓ en $+\infty$ il est connu que

$$\frac{1}{T}\int_0^T g(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[T\to+\infty]{} \ell$$

On a donc

$$\varphi(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 2CS \text{ et } \psi(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} C^2 - S^2$$

en notant

$$C = \int_0^{+\infty} \cos(u^2)\,\mathrm{d}u \text{ et } S = \int_0^{+\infty} \sin(u^2)\,\mathrm{d}u$$

On en déduit $C^2 = S^2$ et $2CS = \pi/2$. Il ne reste plus qu'à déterminer les signes de C et S pour conclure leur valeur.

$$\int_0^{+\infty} \cos(u^2)\,\mathrm{d}u = \sum_{n=0}^{+\infty} I_n$$

avec

$$I_n = \int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} \cos(u^2)\,\mathrm{d}u = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\cos t}{2\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = (-1)^n \int_0^\pi \frac{\cos s}{2\sqrt{s+n\pi}}\,\mathrm{d}s$$

On a alors $I_n = (-1)^n |I_n|$, $(|I_n|)_{n\geqslant 0}$ décroissante et $I_n \to 0$ donc le critère spécial s'applique et assure que la somme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} I_n$ est du signe de son premier terme, à savoir $I_0 > 0$. Ainsi $C > 0$. De plus $CS > 0$ donc $S > 0$ puis

$$C = S = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$$

Exercice 11 : [énoncé]

$$|I_n - 1| = \iint_{[0,1]^2} \frac{x^n+y^n}{1+x^n+y^n}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leqslant \iint_{[0,1]^2} (x^n+y^n)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{2}{n+1} \to 0$$

donc $I_n \to 1$.

Exercice 12 : [énoncé]
Le cercle délimitant le disque étudié a pour équation polaire

$$r = 2\cos\theta$$

En passant en coordonnées polaires

$$I = \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{r=0}^{2\cos\theta} \frac{r\sin\theta}{1+r^2} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

On obtient

$$I = \int_{\theta=0}^{\pi/2} \sin\theta\,[r - \arctan r]_{r=0}^{2\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

donc

$$I = 2\int_{\theta=0}^{\pi/2} \cos\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta - \int_0^{\pi/2} \sin\theta\arctan(2\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

La première intégrale est immédiate et la seconde s'obtient par changement de variable puis intégration par parties

$$I = 1 - \frac{1}{2}\int_0^2 \arctan x\,\mathrm{d}x = 1 - \arctan 2 + \frac{1}{4}\ln 5$$

Exercice 13 : [énoncé]
Considérons
$$f : (x,y) \mapsto \frac{y}{(1+x^2+y^2)^2}$$
f est définie et continue sur $[0,+\infty[^2$.
Pour $x \geqslant 0$, $y \mapsto f(x,y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ car $\frac{y}{(1+x^2+y^2)^2} \sim \frac{1}{y^3}$ quand $y \to +\infty$.
$$\int_0^{+\infty} \frac{y}{(1+x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}y = \left[-\frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2+y^2}\right]_{y=0}^{+\infty} = \frac{1}{2(1+x^2)}$$
De plus $x \mapsto \int_0^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ car $\frac{1}{2(1+x^2)} \sim \frac{1}{x^2}$ quand $x \to +\infty$.
$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$$
Puisque f est positive, on en déduit que f est intégrable sur $[0,+\infty[^2$ et par le théorème de Fubini,
$$\iint_{[0,+\infty[^2} \frac{y}{(1+x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} \frac{y}{(1+x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$$

Exercice 14 : [énoncé]
Soit $f(x,y) = x^y$ continue et positive sur $]0,1[^2$.
D'une part
$$\int_{y=0}^1\left(\int_{x=0}^1 x^y\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int_{y=0}^1 \frac{1}{y+1}\,\mathrm{d}y = \ln 2$$
D'autre part
$$\int_{x=0}^1\left(\int_{y=0}^1 x^y\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_{x=0}^1 \frac{x-1}{\ln x}\,\mathrm{d}x$$
avec $x \mapsto \frac{x-1}{\ln x}$ intégrable sur $]0,1[$.
Par le théorème de Fubini (avec ici $f \geqslant 0$), ces deux intégrales sont égales et donc
$$\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\,\mathrm{d}t = \ln 2$$

Exercice 15 : [énoncé]
Soit $f(x,y) = \frac{1}{1+y\cos x}$ continue et positive sur $[0,\pi]\times[0,1[$.
D'une part :
$$\int_0^\pi\left(\int_0^1 \frac{\mathrm{d}y}{1+y\cos x}\right)\mathrm{d}x = \int_0^\pi \frac{\ln(1+\cos x)}{\cos x}\,\mathrm{d}x$$
et cette intégrale est bien définie.
D'autre part :
$$\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{1+y\cos x} \underset{t=\tan\frac{x}{2}}{=} \int_0^{+\infty} \frac{2\,\mathrm{d}t}{(1+y)+(1-y)t^2} = \frac{\pi}{\sqrt{1-y^2}}$$
et
$$\int_0^1\left(\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{1+y\cos x}\right)\mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{\pi\,\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{\pi^2}{2}$$
Par le théorème de Fubini (avec ici $f \geqslant 0$), ces deux intégrales sont égales et donc
$$\int_0^\pi \frac{\ln(1+\cos t)}{\cos t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{2}$$

Exercice 16 : [énoncé]
Sous réserve d'intégrabilité on a :
$$\int_{x=0}^{+\infty}\left(\int_{y=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_{\theta=0}^{\pi/2}\left(\int_{r=0}^{+\infty} r\mathrm{e}^{-r^2}\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\theta$$
D'une part, la fonction $y \mapsto \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et la fonction $x \mapsto \int_{y=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}y = C\mathrm{e}^{-x^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
D'autre part, la fonction $r \mapsto r\mathrm{e}^{-r^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et la fonction $\theta \mapsto \int_0^{+\infty} r\mathrm{e}^{-r^2}\,\mathrm{d}r$ est intégrable sur $[0,\pi/2]$.
La relation précédente est donc valide.
D'une part, en séparant les variables :
$$\int_{x=0}^{+\infty}\left(\int_{y=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2$$
D'autre part,
$$\int_{\theta=0}^{\pi/2}\left(\int_{r=0}^{+\infty} r\mathrm{e}^{-r^2}\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{2}\left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-r^2}\right]_{r=0}^{+\infty} = \frac{\pi}{4}$$
On peut conclure
$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Exercice 17 : [énoncé]
a) Pour tout $x \in]0,+\infty[$, $y \mapsto \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ et l'application $x \mapsto \int_{y=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}y = C\mathrm{e}^{-x^2}$ est continue et intégrable sur $]0,+\infty[$ donc $(x,y) \mapsto \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$ est intégrable sur $]0,+\infty[^2$ et

$$I = \int_{x=0}^{+\infty}\left(\int_{y=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

Réalisons le changement de variable $y = ux$

$$\int_{y=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}y = \int_{u=0}^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x^2(1+u^2)}\,\mathrm{d}u$$

puis

$$I = \int_{x=0}^{+\infty}\left(\int_{u=0}^{+\infty} x\mathrm{e}^{-(1+u^2)x^2}\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x$$

b) Compte tenu des calculs précédents $(x,u) \mapsto x\mathrm{e}^{-(1+u^2)x^2}$ est intégrable sur $]0,+\infty[^2$ et donc

$$I = \iint_{]0,+\infty[^2} x\mathrm{e}^{-(1+u^2)x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}u$$

Puisque $x \mapsto x\mathrm{e}^{-(1+u^2)x^2}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ et que $u \mapsto \int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-(1+u^2)x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\frac{1}{1+u^2}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ on a aussi

$$I = \int_{u=0}^{+\infty}\left(\int_{x=0}^{+\infty} x\mathrm{e}^{-(1+u^2)x^2}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \frac{\pi}{2}$$

Or par séparation des variables

$$I = \int_{x=0}^{+\infty}\left(\int_{y=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \left(\int_{t=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2$$

donc

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

car cette dernière intégrale est positive.

Exercice 18 : [énoncé]
L'intégrale à la même nature que sur $]0,1]^2$.

$x \mapsto \frac{x-y}{(x+y)^3}$ est intégrable sur $]0,1]$ et

$$\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{(1+y)^2}$$

$y \mapsto -\frac{1}{(1+y)^2}$ est intégrable sur $]0,1]$ et

$$\int_0^1 -\frac{\mathrm{d}y}{(1+y)^2} = -\frac{1}{2}$$

Ainsi $\int_0^1\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\frac{1}{2}$.
Par une démarche symétrique

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$$

On peut donc dire que la fonction $(x,y) \mapsto \frac{x-y}{(x+y)^3}$ n'est pas intégrable sur D.

Exercice 19 : [énoncé]
Posons $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)}$$

La fonction f est continue et positive.
Pour $y \in \mathbb{R}^+$, la fonction $x \mapsto f(x,y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et $y \mapsto \int_0^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2(1+y^2)}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
On en déduit que f est intégrable sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ et

$$\iint_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(1+x^2)(1+y^2)} = \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+y^2)}\right)\mathrm{d}y = \frac{\pi^2}{4}$$

Posons $g : \mathbb{R}^+ \times]0,\pi/2[\to \mathbb{R}$ définie par

$$g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)r = \frac{r}{(1+r^2\cos^2\theta)(1+r^2\sin^2\theta)}$$

La fonction g est continue et positive.
Pour $\theta \in]0,\pi/2[$, la fonction $r \mapsto g(r,\theta)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et

$$\int_0^{+\infty} g(r,\theta)\,\mathrm{d}r \underset{u=r^2}{=} \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{(1+u\cos^2\theta)(1+u\sin^2\theta)} = -\frac{\ln\tan\theta}{\cos 2\theta}$$

Pour $\theta \neq \pi/4$,

$$\frac{1}{(1+u\cos^2\theta)(1+u\sin^2\theta)} = \frac{1}{\cos 2\theta}\left(\frac{\cos^2\theta}{1+u\cos^2\theta} - \frac{\sin^2\theta}{1+u\sin^2\theta}\right)$$

et on en déduit

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{(1+u\cos^2\theta)(1+u\sin^2\theta)} = \frac{1}{\cos 2\theta}\left[\ln\frac{1+u\cos^2\theta}{1+u\sin^2\theta}\right]_0^{+\infty} = -2\frac{\ln\tan\theta}{\cos 2\theta}$$

puis

$$\int_0^{+\infty} g(r,\theta)\,\mathrm{d}r = -\frac{\ln\tan\theta}{\cos 2\theta}$$

De plus, pour $[a,b] \subset \left]0,\pi/2\right[$, on a

$$|g(r,\theta)| \leqslant \frac{r}{(1+r^2\cos^2 b)(1+r^2\sin^2 a)} = \varphi(r)$$

avec φ intégrable sur $[0,+\infty[$ donc, par domination sur tout segment, on peut affirmer que $\theta \mapsto \int_0^{+\infty} g(r,\theta)\,\mathrm{d}\theta$ est continue sur $\left]0,\pi/2\right[$. Par cet argument, il n'est pas nécessaire de calculer l'intégrale pour $\theta = \pi/4$.
La fonction $h : \theta \mapsto \int_0^{+\infty} g(r,\theta)\,\mathrm{d}\theta$ est intégrable sur $\left]0,\pi/4\right]$ car quand $\theta \to 0^+$,

$$\sqrt{\theta}h(\theta) = -\frac{\sqrt{\theta}\ln(\tan\theta)}{\cos 2\theta} \sim -\sqrt{\theta}\ln\theta \to 0$$

De plus, $h(\pi/2-\theta) = h(\theta)$ donc h est aussi intégrable sur $[\pi/4,\pi/2[$.
Par le théorème d'intégration en coordonnées polaires, on a alors

$$\iint_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{+\infty} g(r,\theta)\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\theta$$

d'où l'on tire

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\ln\tan\theta}{\cos 2\theta}\,\mathrm{d}\theta = -\frac{\pi^2}{4}$$

En posant $t = \tan\theta$, on a $\mathrm{d}t = (1+t^2)\,\mathrm{d}\theta$ et

$$\cos 2\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

et on obtient

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{t^2-1}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{4}$$

Exercice 20 : [énoncé]
Commençons par le cas où

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda,\mu > 0$$

On étudie alors

$$I = \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-(\lambda x^2+\mu y^2)\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Posons $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \exp\left(-(\lambda x^2+\mu y^2)\right)$$

La fonction f est définie, continue et positive sur $\mathbb{R}^2$.
Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $y \mapsto f(x,y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et

$$\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}y = \mathrm{e}^{-\lambda x^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\mu y^2}\,\mathrm{d}y = C^{te}\mathrm{e}^{-\lambda x^2}$$

La fonction $x \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}y$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et par conséquent f est intégrable sur $\mathbb{R}^2$ avec

$$I = \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \left(\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\lambda x^2}\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\mu y^2}\,\mathrm{d}y\right)$$

Sachant

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$$

on obtient par un changement de variable affine

$$I = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda\mu}} = \frac{\pi}{\sqrt{\det A}}$$

Passons au cas général.
Notons $\lambda,\mu > 0$ les deux valeurs propres de la matrice A. Il existe une base orthonormée $(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ telle que si $X = u\vec{e}_1 + v\vec{e}_2$ alors

$${}^tXAX = \lambda u^2 + \mu v^2$$

Considérons alors l'application $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ qui à (x,y) associe (u,v) de sorte que

$$(x,y) = u\vec{e}_1 + v\vec{e}_2$$

φ est une isométrie de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, la valeur absolue de son jacobien vaut 1 et φ transforme le disque

$$D(0,R) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2 \leqslant R^2\right\}$$

en lui-même. Par le changement de variable $(u,v)=\varphi(x,y)$

$$\iint_{D(0,R)} \exp(-{}^tXAX)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{D(0,R)} \exp\left(-(\lambda u^2+\mu v^2)\right)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

Quand $R\to+\infty$, l'étude d'intégrabilité du cas initial donne

$$\iint_{D(0,R)} \exp\left(-(\lambda u^2+\mu v^2)\right)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \to \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-(\lambda u^2+\mu v^2)\right)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda\mu}}$$

On en déduit

$$\iint_{D(0,R)} \exp(-{}^tXAX)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \xrightarrow[R\to+\infty]{} \frac{\pi}{\sqrt{\lambda\mu}}$$

Tout pavé $[a,b]\times[c,d]$ étant inclus dans un disque $D(0,R)$ pour R assez grand et inversement tout disque $D(0,R)$ étant inclus dans un pavé assez grand, on peut affirmer que la fonction continue positive $(x,y)\mapsto\exp(-{}^tXAX)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^2$ et

$$I = \sup_{[a,b]\times[c,d]\subset\mathbb{R}^2} \iint_{[a,b]\times[c,d]} \exp(-{}^tXAX)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \lim_{R\to+\infty} \iint_{D(0,R)} \exp(-{}^tXAX)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda\mu}} = \frac{\pi}{\sqrt{\det A}}$$

Exercice 21 : [énoncé]

a) Après étude du système différentiel

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = x+y \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x-y \end{cases}$$

on vérifie aisément que

$$f(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + xy - \frac{1}{2}y^2$$

est une primitive de la forme différentielle ω.

b) Soit y une solution sur I de l'équation différentielle étudiée.

Pour tout $x\in I$, on a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(f(x,y(x))\right) = 0$$

donc $x\mapsto f(x,y(x))$ est une fonction constante. En posant λ la valeur de cette constante, on obtient

$$\forall x\in I, y^2 - 2xy - x^2 + 2\lambda = 0$$

puis

$$\forall x\in I, x^2-\lambda\geqslant 0 \text{ et } y(x) = x+\varepsilon(x)\sqrt{2x^2-2\lambda} \text{ avec } \varepsilon(x)=\pm1$$

Pour $\lambda<0$, la quantité $x^2-\lambda$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$. Puisque la fonction

$$\varepsilon : x\mapsto\varepsilon(x) = \frac{y(x)-x}{\sqrt{2x^2-2\lambda}}$$

est continue et ne prend que les valeurs 1 ou -1, elle est constante et donc

$$\forall x\in I, y(x) = x+\sqrt{2x^2-2\lambda} \text{ ou } \forall x\in I, y(x) = x-\sqrt{2x^2-2\lambda}$$

Pour $\lambda>0$, quand la quantité $x^2-\lambda$ s'annule, elle change de signe et ce ne peut donc qu'être en une extrémité de l'intervalle I. Par un argument de continuité semblable au précédent, on obtient encore

$$\forall x\in I, y(x) = x+\sqrt{2x^2-2\lambda} \text{ ou } \forall x\in I, y(x) = x-\sqrt{2x^2-2\lambda}$$

et puisque la fonction y est dérivable sur I, on a nécessairement $x^2-\lambda>0$ sur I.

Pour $\lambda=0$.

Si $I\subset\mathbb{R}^+$ ou $I\subset\mathbb{R}^-$ alors comme pour ce qui précède on obtient

$$\forall x\in I, y(x) = (1+\sqrt{2})x \text{ ou } \forall x\in I, y(x) = (1-\sqrt{2})x$$

Sinon, par dérivabilité d'un raccord en 0 d'une solution sur $I\cap\mathbb{R}^+$ et sur $I\cap\mathbb{R}^-$, on obtient encore

$$\forall x\in I, y(x) = (1+\sqrt{2})x \text{ ou } \forall x\in I, y(x) = (1-\sqrt{2})x$$

Inversement, les fonctions proposées sont bien solutions en vertu des calculs qui précèdent.

Pour résumer, les solutions maximales de l'équation différentielle étudiée sont

– $x\mapsto(1+\sqrt{2})x$ et $x\mapsto(1-\sqrt{2})x$ sur $\mathbb{R}$;

– $x\mapsto x+\sqrt{2x^2+2\lambda}$ et $x\mapsto x+\sqrt{2x^2-2\lambda}$ sur $\mathbb{R}$ pour $\lambda<0$;

– $x\mapsto x+\sqrt{2x^2+2\lambda}$ et $x\mapsto x+\sqrt{2x^2-2\lambda}$ sur $\left]-\infty,-\sqrt{\lambda}\right[$ et $\left]\sqrt{\lambda},+\infty\right[$ pour $\lambda>0$.

Exercice 22 : [énoncé]

a) Oui, on vérifie par le calcul

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

b) On paramètre le cercle Γ par $x=\cos t$, $y=\sin t$, $t\in[0,2\pi]$. On obtient

$$\int_\Gamma \omega = \int_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}t = 2\pi$$

c) Non car si ω était exacte on aurait

$$\int_\Gamma \omega = 0$$

Exercice 23 : [énoncé]
a) Par calculs (pénibles).
b) C peut être inclus dans un ouvert étoilé où ω est exacte et alors $\oint_C \omega = 0$.
c) On peut décomposer

$$\oint_\Gamma \omega = \int_{1/n}^{n} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x + \int_{C_n} \omega - \int_{n}^{1/n} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x + \int_{C_{1/n}} \omega$$

avec C_n et $C_{1/n}$ les demi-cercles de rayon n et $1/n$.

$$\int_{1/n}^{n} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x - \int_{n}^{1/n} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = 2\int_{1/n}^{n} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \to 2\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$$

La convergence de cette dernière intégrale est considérée comme bien connue.
Etudions

$$\int_{C_n} \omega = \int_0^\pi \mathrm{e}^{-n\sin\theta}\cos(n\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

Puisque $\left|\mathrm{e}^{-n\sin\theta}\cos(n\cos\theta)\right| \leqslant 1$ et $\mathrm{e}^{-n\sin\theta}\cos(n\cos\theta) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ pour tout $\theta \in \left]0,\pi\right[$, par convergence dominée on obtient

$$\int_{C_n} \omega \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Etudions

$$\int_{C_{1/n}} \omega = \int_0^\pi \mathrm{e}^{-\frac{1}{n}\sin\theta}\cos\left(\frac{1}{n}\cos\theta\right)\mathrm{d}\theta$$

Puisque $\left|\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}\sin\theta}\cos\left(\frac{1}{n}\cos\theta\right)\right| \leqslant 1$ et $\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}\sin\theta}\cos(\frac{1}{n}\cos\theta) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ pour tout $\theta \in [0,\pi]$, par convergence dominée on obtient

$$\int_{C_{1/n}} \omega \xrightarrow[n\to+\infty]{} \pi$$

Finalement

$$2\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \pi$$

puis

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 24 : [énoncé]
a)

$$\oint_{\Gamma_r} \mathrm{e}^{-(x+iy)^2}(\,\mathrm{d}x + i\,\mathrm{d}y) = \oint_{\Gamma_r} P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y \text{ avec } P(x,y) = iQ(x,y) = \mathrm{e}^{-(x+iy)^2}$$

Or

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = -2i(x+iy)\mathrm{e}^{-(x+iy)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$$

donc

$$\oint_{\Gamma_r} \mathrm{e}^{-(x+iy)^2}(\,\mathrm{d}x + i\,\mathrm{d}y) = 0$$

car la forme différentielle est fermée donc exacte sur l'ouvert étoilée $\mathbb{C}$.
b)

$$J_r = \int_{\mathcal{C}_r} \mathrm{e}^{-(x+iy)^2}(\,\mathrm{d}x + i\,\mathrm{d}y) = \int_0^{\pi/4} r\mathrm{e}^{-r^2(\cos t + i\sin t)^2}(\sin t - i\cos t)\,\mathrm{d}t$$

donc

$$|J_r| \leqslant \int_0^{\pi/4} r\mathrm{e}^{-r^2\cos 2t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/4} r\mathrm{e}^{-r^2\sin 2u}\,\mathrm{d}u \underset{\sin t \geqslant \frac{2}{\pi}t}{\leqslant} \int_0^{\pi/4} r\mathrm{e}^{-\frac{4}{\pi}ur^2}\,\mathrm{d}u = \left[\frac{4}{\pi r}\mathrm{e}^{-\frac{4}{\pi}ur^2}\right]_0^{\pi/4}$$

c) On a

$$\int_{[O,A]} \mathrm{e}^{-(x+iy)^2}(\,\mathrm{d}x + i\,\mathrm{d}y) = \int_0^r \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

et

$$\int_{[B,O]} \mathrm{e}^{-(x+iy)^2}(\,\mathrm{d}x + i\,\mathrm{d}y) = -\int_0^r \mathrm{e}^{-it^2}\frac{1+i}{\sqrt{2}}\,\mathrm{d}t$$

Sachant

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

on obtient

$$\lim_{r\to+\infty} \int_0^r \cos t^2 + \sin t^2\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi/2}$$

et

$$\lim_{r\to+\infty} \int_0^r \cos t^2 - \sin t^2\,\mathrm{d}t = 0$$

On peut alors conclure

$$\lim_{r\to+\infty} \int_0^{+\infty} \cos t^2\,\mathrm{d}t = \lim_{r\to+\infty} \int_0^{+\infty} \sin t^2\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$$

Exercice 25 : [énoncé]
a) En paramétrant les deux courbes constituant Γ

$$I = \int_0^1 x^2 + x^3 \,\mathrm{d}x - \int_0^1 x + x^2 \,\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}$$

b) Par la formule de Green-Riemann

$$I = -\iint_{\mathcal{D}} (1+x) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$$

avec $\mathcal{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leqslant x \leqslant 1, x^2 \leqslant y \leqslant x\right\}$.
On en déduit

$$I = -\int_0^1 \left(\int_{x^2}^x (1+x) \,\mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x = -\int_0^1 (1+x)(x-x^2) \,\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}$$

Exercice 26 : [énoncé]
Le domaine limité étant parcouru dans le sens direct, on peut calculer son aire par l'intégrale curviligne

$$\mathcal{A} = \oint x \,\mathrm{d}y$$

On obtient

$$\mathcal{A} = \int_0^{2\pi} ab\cos^2 t \,\mathrm{d}t = \pi ab$$

Exercice 27 : [énoncé]
Le domaine limité étant parcouru dans le sens direct, on peut calculer son aire par l'intégrale curviligne

$$\mathcal{A} = \oint x \,\mathrm{d}y$$

On obtient

$$\mathcal{A} = \int_0^{2\pi} 3a^2 \cos^4 t \sin^2 t \,\mathrm{d}t = \frac{3\pi}{8} a^2$$

Exercice 28 : [énoncé]
On calcule l'aire étudiée par l'intégrale curviligne

$$\mathcal{A} = \oint x \,\mathrm{d}y$$

le long d'un pourtour direct du domaine limité. Le pourtour est ici formé par la réunion de deux arcs, l'arche de cycloïde (parcouru dans le sens indirect) et un segment de l'axe (Ox). On obtient

$$\mathcal{A} = -\int_0^{2\pi} (t - \sin t) \sin t \,\mathrm{d}t + \int_0^{2\pi} 0 \,\mathrm{d}t = 3\pi$$

Exercice 29 : [énoncé]
La courbe étudiée est intégralement obtenue pour $t \in [0, 2\pi]$ et le domaine limité est parcouru dans le sens direct. On peut calculer son aire par l'intégrale curviligne

$$\mathcal{A} = \oint x \,\mathrm{d}y$$

On obtient

$$\mathcal{A} = \int_0^{2\pi} \cos^4 t - \cos^2 t(1 + \sin t) \sin t \,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 30 : [énoncé]
Le domaine limité étant parcouru dans le sens direct, on peut calculer son aire par l'intégrale curviligne

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \oint r^2 \,\mathrm{d}\theta$$

On obtient

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta) \,\mathrm{d}\theta = \frac{3\pi}{2}$$

Exercice 31 : [énoncé]
L'aire voulue se calcule par une intégrale curviligne le long d'un pourtour direct du domaine

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \oint r^2 \,\mathrm{d}\theta$$

Pour θ variant de $-\pi/4$ à $\pi/4$, on parcourt une boucle de lemniscate dans le sens direct, on obtient par considération de symétrie

$$\mathcal{A} = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos 2\theta \,\mathrm{d}\theta = 1$$

Exercice 32 : [énoncé]
La boucle de la courbe considérée est obtenue pour $\theta \in [-\pi/4, \pi/4]$ et elle est parcourue dans le sens direct.
L'aire voulue se calcule par l'intégrale curviligne

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\oint r^2 \,\mathrm{d}\theta$$

On obtient par considération de symétrie

$$\mathcal{A} = \int_0^{\pi/4} 4\cos^2\theta - 4 + \frac{1}{\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta = 2 - \frac{\pi}{2}$$

Exercice 33 : [énoncé]
a) $g : (r,t) \mapsto f(r\cos t, r\sin t)$ est $\mathcal{C}^1$ donc g et $\frac{\partial g}{\partial r}$ sont continues sur $\mathbb{R}\times[0,2\pi]$ et φ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
b) La fonction $(r,\theta) \mapsto f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ admet une dérivée partielle en la variable r et celle-ci est continue sur $\mathbb{R}\times[0,2\pi]$. Par intégration sur un segment, φ est dérivable et

$$\varphi'(r) = \int_0^{2\pi} \cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + \sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

En notant Γ le cercle de centre O et de rayon r parcouru dans le sens direct et $\mathcal{D}$ le disque correspondant,

$$r\varphi'(r) = \int_\Gamma \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,\mathrm{d}y - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,\mathrm{d}x = \iint_{\mathcal{D}} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$$

On en déduit $\varphi'(r) = 0$ pour $r \neq 0$, puis par continuité pour tout $r \in \mathbb{R}$.
Par suite la fonction φ est constante égale à

$$\varphi(0) = 2\pi f(0,0)$$

c) En passant aux coordonnées polaires

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^R \int_0^{2\pi} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r = \pi R^2 f(0,0)$$

Exercice 34 : [énoncé]
a) Posons $x = \mathrm{Re}(\gamma)$, $y = \mathrm{Im}(\gamma)$.

$$S = \int_\gamma \frac{1}{2}\left(x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x\right) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(x(s)y'(s) - y(x)x'(s)\right)\,\mathrm{d}s$$

donc $S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \mathrm{Im}(\bar\gamma(s)\gamma'(s))\,\mathrm{d}s = \pi\mathrm{Im}(\gamma \mid \gamma')$ en notant $(.\mid.)$ le produit scalaire usuel.
Par la formule polarisée de Parseval :

$$(\gamma \mid \gamma') = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{c_n(\gamma)}c_n(\gamma') = \sum_{n\in\mathbb{Z}} in\left|c_n(\gamma)\right|^2$$

car $c_n(\gamma') = inc_n(\gamma)$ et donc

$$S = \sum_{n\in\mathbb{Z}} n\left|c_n(\gamma)\right|^2$$

b) Par la formule de Parseval on a :

$$\sum_n \left|inc_n\right|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|\gamma'(s)\right|^2\,\mathrm{d}s = 1$$

donc

$$\sum_n n^2\left|c_n\right|^2 = 1$$

puis

$$S = \pi\sum_n n\left|c_n\right|^2 \leqslant \pi\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2\left|c_n\right|^2 \leqslant \pi$$

avec égalité si, et seulement si, $c_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ tel que $|n| > 1$.
On a alors $\gamma(s) = c_0 + c_1\mathrm{e}^{is}$ avec $|c_1| = 1$ car $|\gamma'(s)| = 1$.
γ est un paramétrage direct d'un cercle de diamètre 1.